# Analyse de sensibilité pour équations hyperboliques



6 avril 2017 - Séminaire des jeunes LMV

Camilla Fiorini

### Plan de l'exposé

- Introduction aux équations hyperboliques
- Introduction à l'analyse de sensibilité
- Analyse de sensibilité pour équations hyperboliques

Introduction
aux équations
hyperboliques

# **Équations hyperboliques**

On considère un système de la forme :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \nabla \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0 & \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{g}(x) & \Omega, \\ + \text{c.b.} & \partial \Omega \times (0, T) \end{cases}$$

- ▶ U : état
- $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ : flux
- g : condition initiale

## **Équations hyperboliques**

On considère un système de la forme :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \nabla \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0 & \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{g}(x) & \Omega, \\ + \text{c.b.} & \partial \Omega \times (0, T) \end{cases}$$

- ▶ U : état
- $ightharpoonup \mathbf{F}(\mathbf{U})$ : flux
- ▶ g : condition initiale

### Remarques:

 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  N=1,2,3. Dimension du domaine physique.

 $\mathbf{U}(x,t) \in \mathbb{R}^D D$ : dimension du système. Si D=1 on parle de problème scalaire.

On dit que l'équation est linéaire si  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$  est linéaire.

• Cas 1D scalaire et linéaire : f(u) = cu

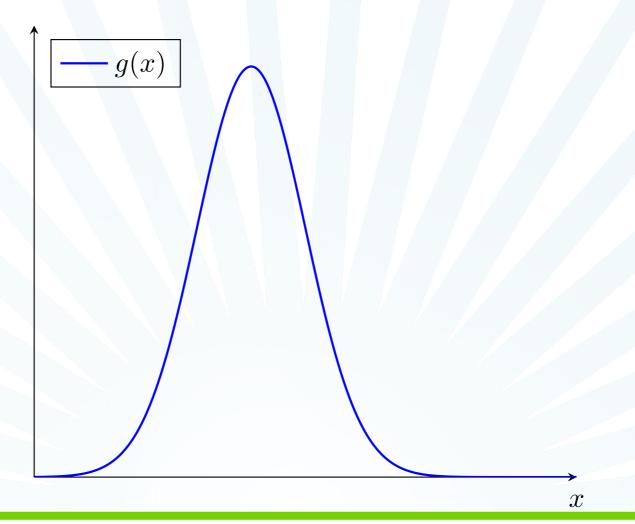
$$\begin{cases} \partial_t u + c \partial_x u = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$

• Cas 1D scalaire et linéaire : f(u) = cu

$$\begin{cases} \partial_t u + c \partial_x u = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$

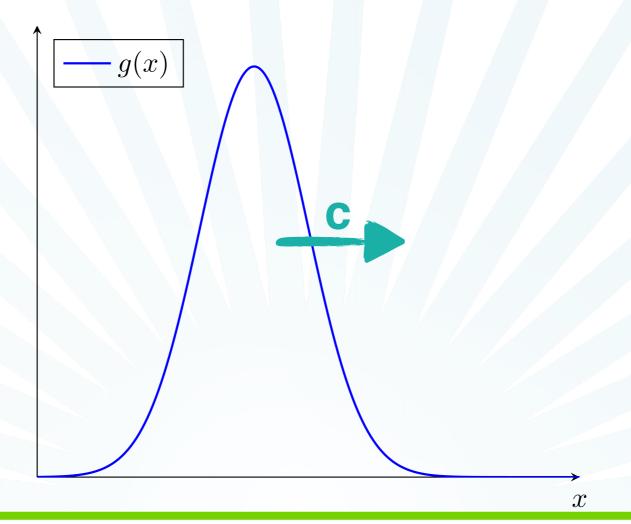
• Cas 1D scalaire et linéaire : f(u) = cu

$$\begin{cases} \partial_t u + c \partial_x u = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$



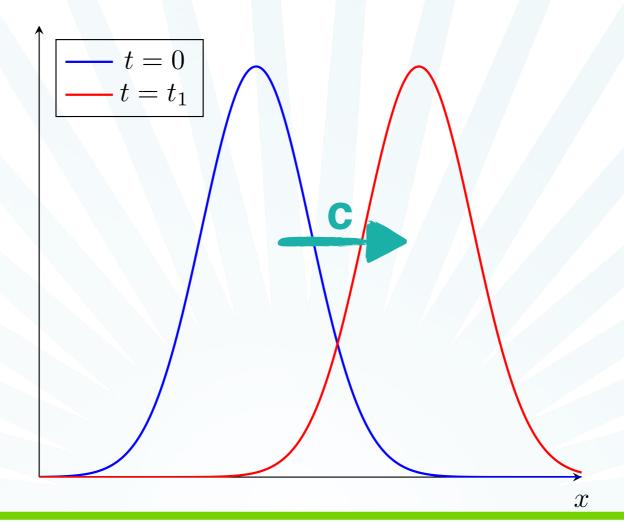
• Cas 1D scalaire et linéaire : f(u) = cu

$$\begin{cases} \partial_t u + c \partial_x u = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$



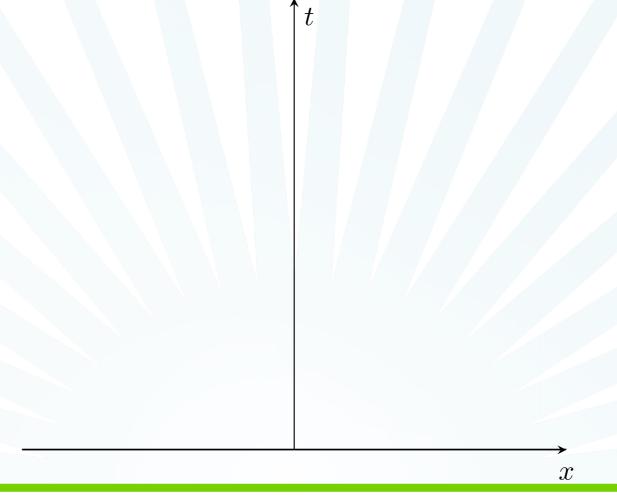
• Cas 1D scalaire et linéaire : f(u) = cu

$$\begin{cases} \partial_t u + c \partial_x u = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$



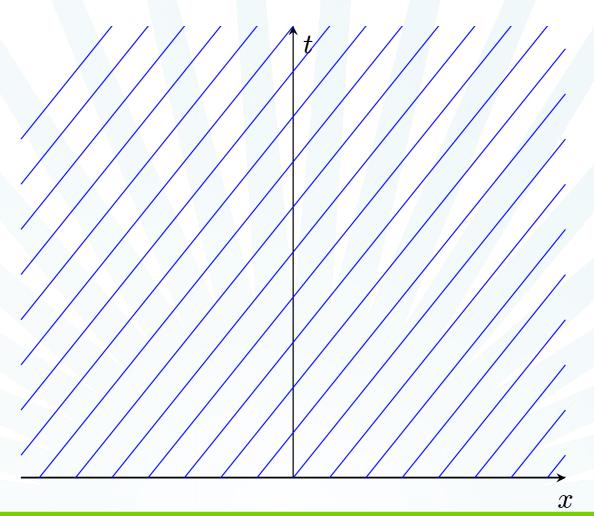
• Cas 1D scalaire et linéaire : f(u) = cu

$$\begin{cases} \partial_t u + c \partial_x u = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$



• Cas 1D scalaire et linéaire : f(u) = cu

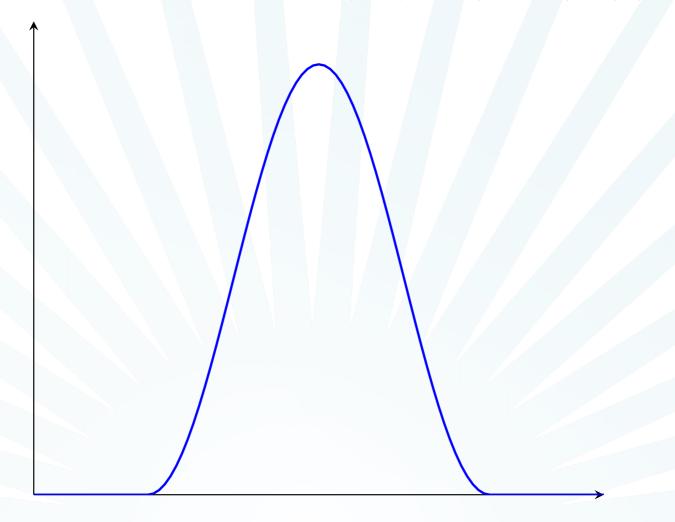
$$\begin{cases} \partial_t u + c \partial_x u = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$



▶ Cas 1D scalaire non linéaire :  $f(u) = \frac{u^2}{2}$   $\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$ 

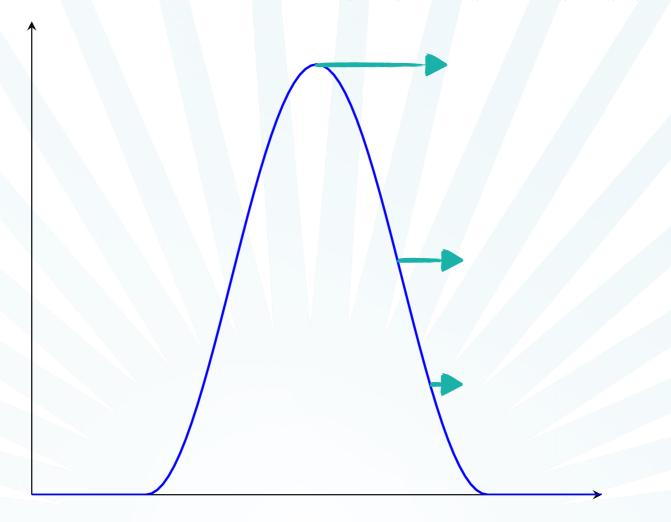
• Cas 1D scalaire non linéaire :  $f(u) = \frac{u^2}{2}$ 

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$



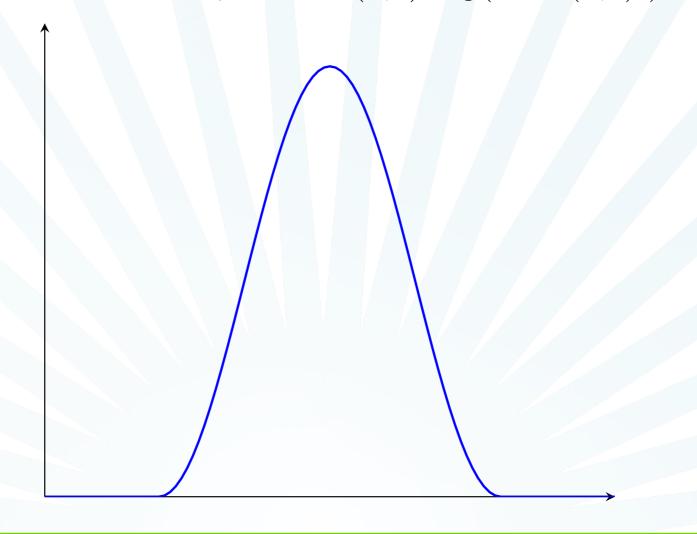
• Cas 1D scalaire non linéaire :  $f(u) = \frac{u^2}{2}$ 

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$



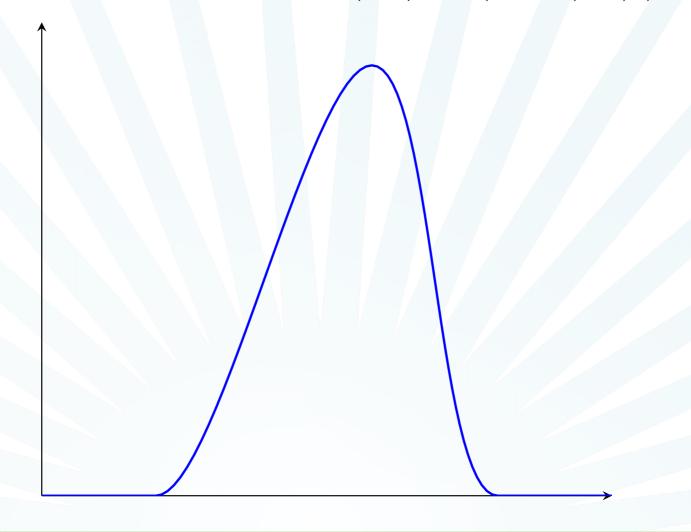
▶ Cas 1D scalaire non linéaire :  $f(u) = \frac{u^2}{2}$ 

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$



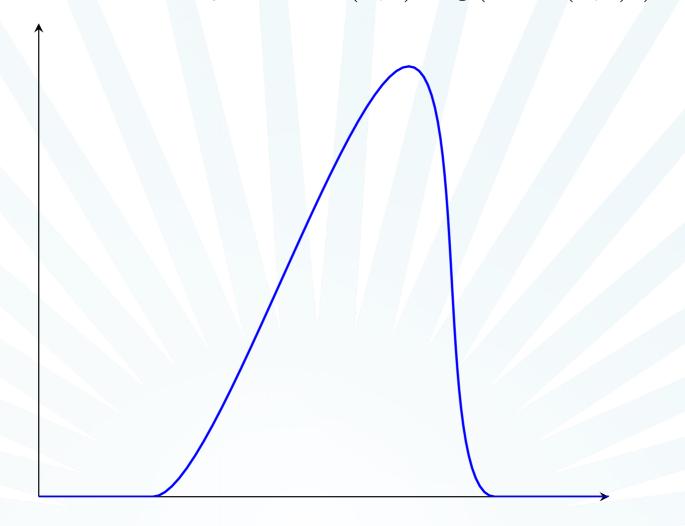
• Cas 1D scalaire non linéaire :  $f(u) = \frac{u^2}{2}$ 

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$



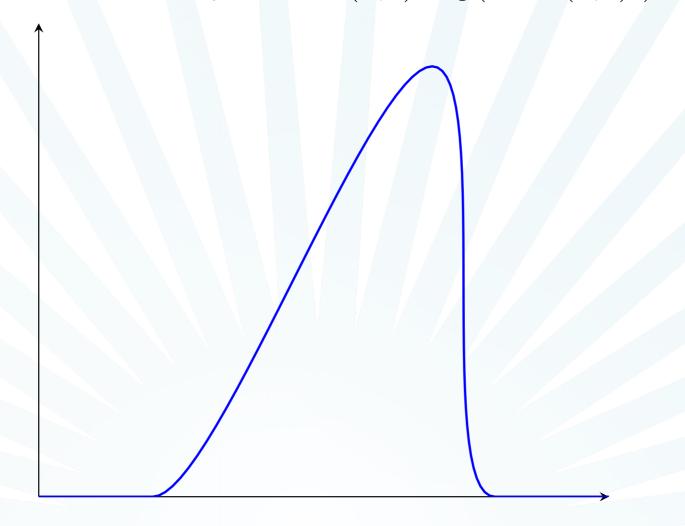
▶ Cas 1D scalaire non linéaire :  $f(u) = \frac{u^2}{2}$ 

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$



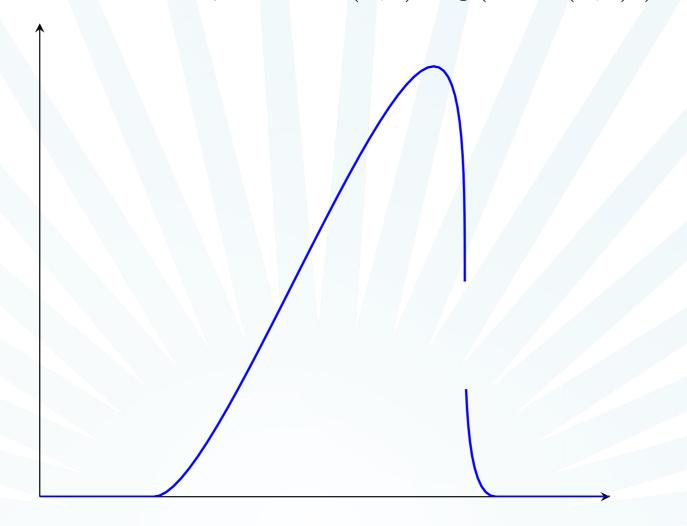
Cas 1D scalaire non linéaire :  $f(u) = \frac{u^2}{2}$ 

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$



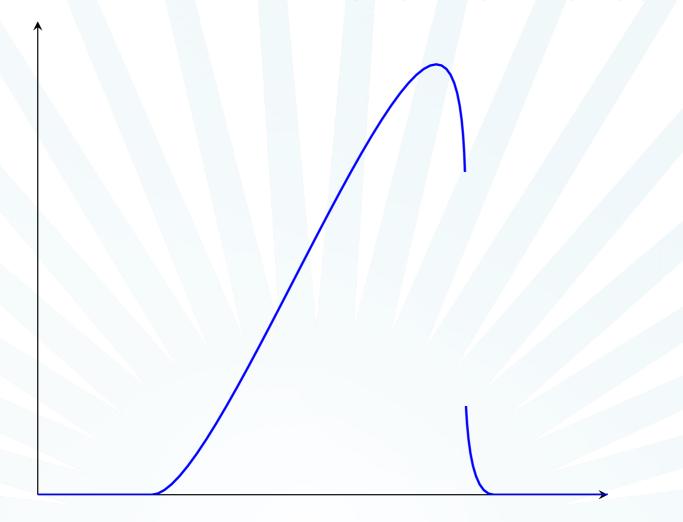
▶ Cas 1D scalaire non linéaire :  $f(u) = \frac{u^2}{2}$ 

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$



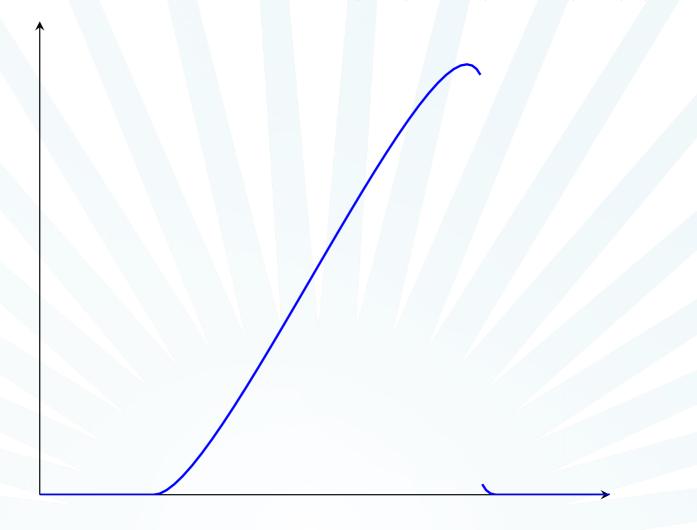
• Cas 1D scalaire non linéaire :  $f(u) = \frac{u^2}{2}$ 

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$



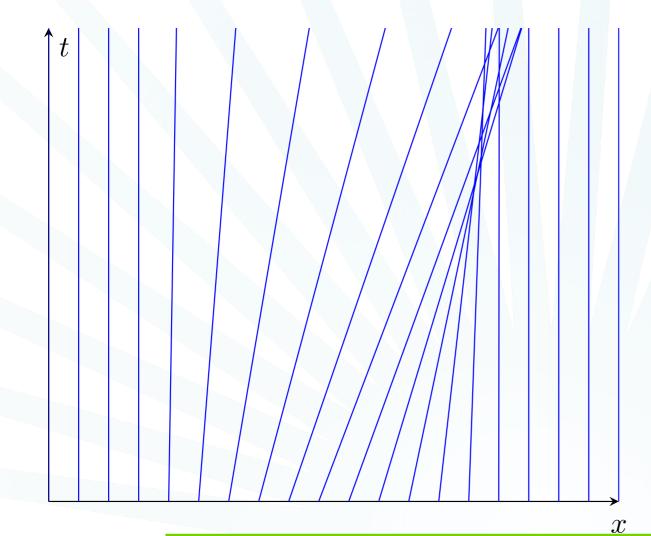
Cas 1D scalaire non linéaire :  $f(u) = \frac{u^2}{2}$ 

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$



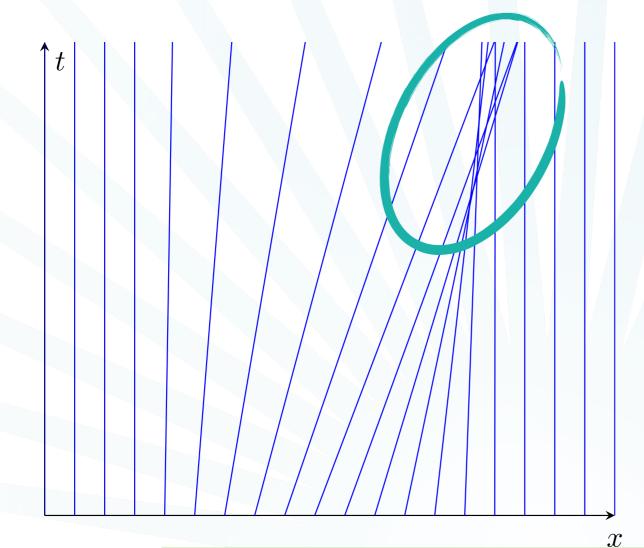
• Cas 1D scalaire non linéaire :  $f(u) = \frac{u^2}{2}$ 

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$



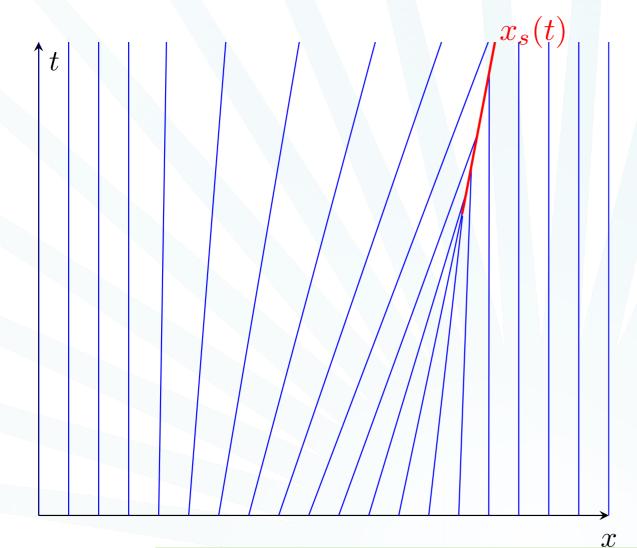
• Cas 1D scalaire non linéaire :  $f(u) = \frac{u^2}{2}$ 

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$



• Cas 1D scalaire non linéaire :  $f(u) = \frac{u^2}{2}$ 

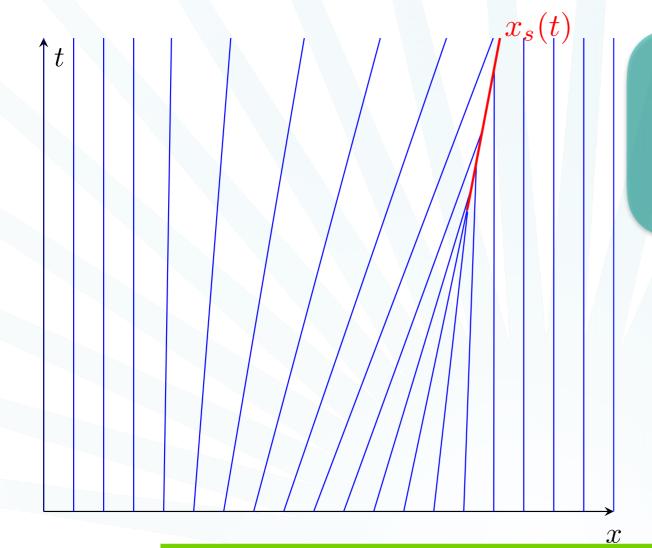
$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$



• Cas 1D scalaire non linéaire :  $f(u) = \frac{u^2}{2}$ 

$$\begin{cases} \partial_t u + u \partial_x u = 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$

La solution est connue sous forme implicite : u(x,t) = g(x - u(x,t)t)



### **Conditions de Rankine-Hugoniot :**

$$\sigma(u^{+} - u^{-}) = f(u^{+}) - f(u^{-})$$
$$\dot{x}_{s} = \sigma$$

### Problème de Riemann

On parle de problème de Riemann si la donnée initiale est de la forme :

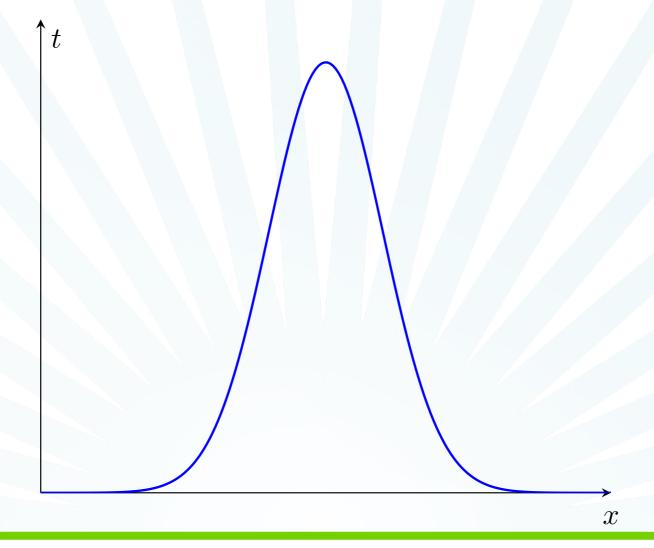
$$\mathbf{U}(x,0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{if } x < x_c \\ \mathbf{U}_R & \text{if } x > x_c \end{cases}$$

### Problème de Riemann

On parle de problème de Riemann si la donnée initiale est de la forme :

$$\mathbf{U}(x,0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{if } x < x_c \\ \mathbf{U}_R & \text{if } x > x_c \end{cases}$$

Importance du problème de Riemann : la méthode de Godunov

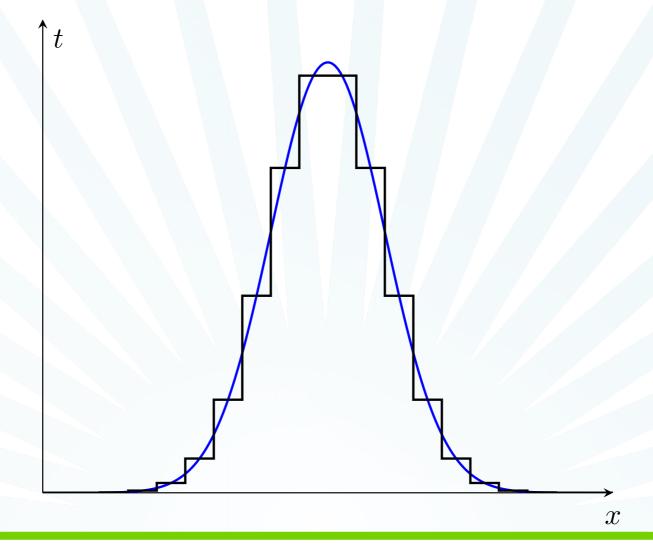


### Problème de Riemann

On parle de problème de Riemann si la donnée initiale est de la forme :

$$\mathbf{U}(x,0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{if } x < x_c \\ \mathbf{U}_R & \text{if } x > x_c \end{cases}$$

Importance du problème de Riemann : la méthode de Godunov



### Solution du problème de Riemann pour un système

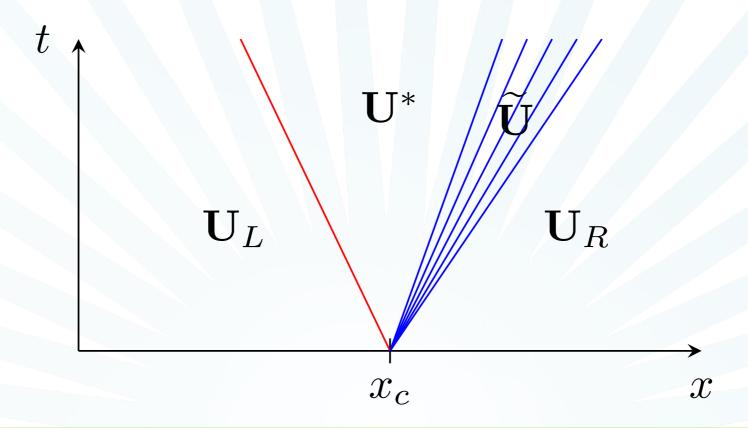
On peut réécrire l'équation  $\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0$  sous forme non conservative :

$$\partial_t \mathbf{U} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \partial_x \mathbf{U} = 0$$
 où  $\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}$  est une matrice DxD.

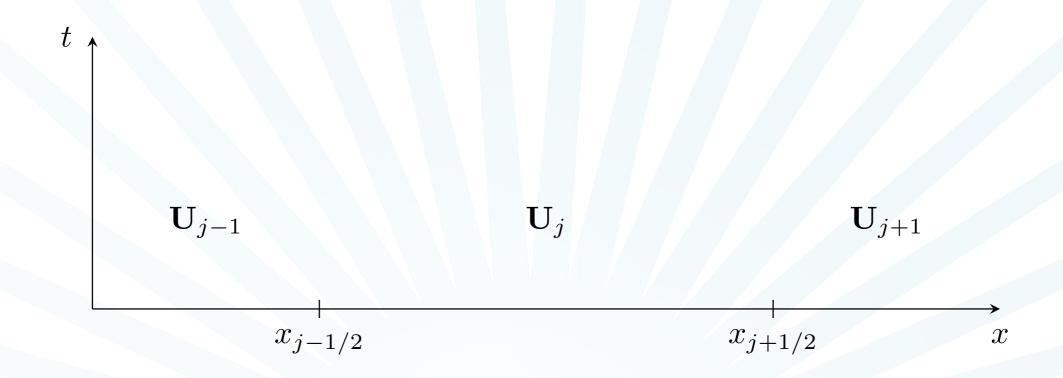
Une onde est associée à chaque couple valeur propre-vecteur propre  $(\lambda_i, \mathbf{r}_i)$ .

Types d'onde : choc, détente, discontinuité de contact.

Exemple : pour un système 2x2

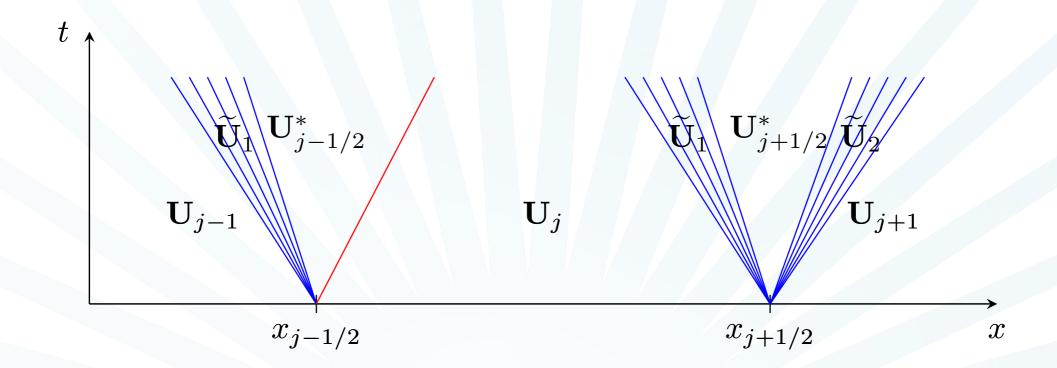


Étape 0 : discrétisation de la donnée initiale



Étape 0 : discrétisation de la donnée initiale

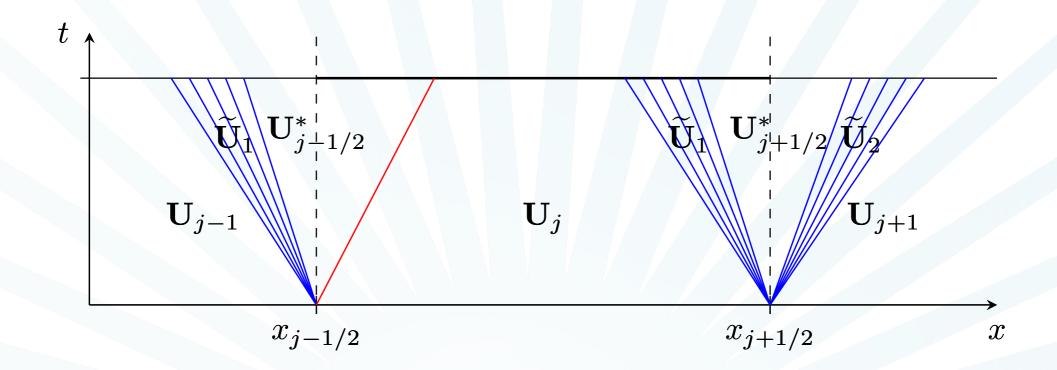
Étape 1 : résolution des problèmes de Riemann, un par interface



Étape 0 : discrétisation de la donnée initiale

Étape 1 : résolution des problèmes de Riemann, un par interface

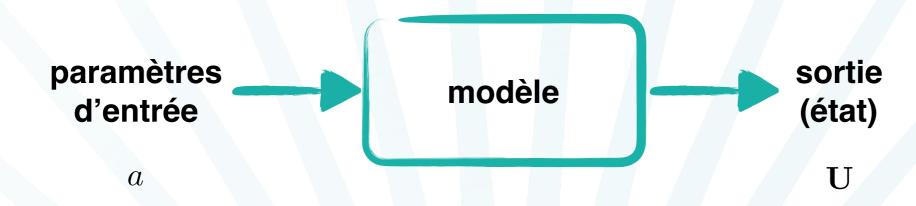
Étape 2 : moyenne



Introduction
à l'analyse
de sensibilité

### Analyse de sensibilité

Analyse de sensibilité : étude des changements dans l'**output** d'un modèle en fonction de la variation de l'**input**.



Sensibilité : 
$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial a} = \mathbf{U}_a$$

Quantification d'incertitude

- Quantification d'incertitude
- Optimisation

- Quantification d'incertitude
- Optimisation

Problème : 
$$\min_{a \in \mathcal{A}} J(\mathbf{U})$$
 , où  $J(\mathbf{U}) = b(\mathbf{U}, \mathbf{U})$ 

Les méthodes classiques d'optimisation requièrent de deriver la fonctionnelle de coût :

$$\frac{\partial J(\mathbf{U})}{\partial a} = b(\mathbf{U}, \mathbf{U}_a)$$

- Quantification d'incertitude
- Optimisation

- Quantification d'incertitude
- Optimisation
- Évaluation rapide des solutions proches

- Quantification d'incertitude
- Optimisation
- Évaluation rapide des solutions proches

$$\mathbf{U}(a+\delta a) = \mathbf{U}(a) + \delta a \mathbf{U}_a(a) + o(\delta a^2)$$

$$\begin{cases} \partial_a(\partial_t \mathbf{U}) + \partial_a(\nabla \mathbf{F}(\mathbf{U})) = 0 & \Omega \times (0, T), \\ \partial_a \mathbf{U}(x, 0) = \partial_a \mathbf{g}(x) & \Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_a(\partial_t \mathbf{U}) + \partial_a(\nabla \mathbf{F}(\mathbf{U})) = 0 & \Omega \times (0, T), \\ \partial_a \mathbf{U}(x, 0) = \partial_a \mathbf{g}(x) & \Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_a(\partial_t \mathbf{U}) + \partial_a(\nabla \mathbf{F}(\mathbf{U})) = 0 & \Omega \times (0, T), \\ \partial_a \mathbf{U}(x, 0) = \partial_a \mathbf{g}(x) & \Omega, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U}_a + \nabla \mathbf{F}_a(\mathbf{U}, \mathbf{U}_a) = 0 & \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{U}_a(x, 0) = \mathbf{g}_a(x) & \Omega, \end{cases}$$

Les techniques classiques d'analyse de sensibilité nécessitent de dériver le système d'état :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U}_a + \nabla \mathbf{F}_a(\mathbf{U}, \mathbf{U}_a) = 0 & \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{U}_a(x, 0) = \mathbf{g}_a(x) & \Omega, \end{cases}$$

Cela fonctionne sous **hypothèses de régularité** de l'état **U**.

Les techniques classiques d'analyse de sensibilité nécessitent de dériver le système d'état :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U}_a + \nabla \mathbf{F}_a(\mathbf{U}, \mathbf{U}_a) = 0 & \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{U}_a(x, 0) = \mathbf{g}_a(x) & \Omega, \end{cases}$$

Cela fonctionne sous **hypothèses de régularité** de l'état **U**.

En appliquant ces techniques aux équations hyperboliques, dans le cas d'un choc des **Dirac** apparaissent dans la sensibilité.

Analyse

de sensibilité

pour équations

hyperboliques

Pour que le système d'équations de sensibilité soit valable même quand l'état est discontinu, nous rajoutons un terme source :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U}_a + \partial_x \mathbf{F}_a(\mathbf{U}, \mathbf{U}_a) = \mathbf{S} & \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{U}_a(x, 0) = \mathbf{g}_a(x) & \Omega, \end{cases}$$

de la forme suivante :

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^{N_s} \boldsymbol{\rho}_k \delta(x - x_{k,s}(t)),$$

Pour que le système d'équations de sensibilité soit valable même quand l'état est discontinu, nous rajoutons un terme source :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U}_a + \partial_x \mathbf{F}_a(\mathbf{U}, \mathbf{U}_a) = \mathbf{S} & \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{U}_a(x, 0) = \mathbf{g}_a(x) & \Omega, \end{cases}$$

de la forme suivante :

nombre de discontinuités

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^{N_s} \boldsymbol{\rho}_k \delta(x - x_{k,s}(t)),$$

Pour que le système d'équations de sensibilité soit valable même quand l'état est discontinu, nous rajoutons un terme source :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U}_a + \partial_x \mathbf{F}_a(\mathbf{U}, \mathbf{U}_a) = \mathbf{S} & \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{U}_a(x, 0) = \mathbf{g}_a(x) & \Omega, \end{cases}$$

de la forme suivante :

nombre de discontinuités

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^{N_s} \rho_k \delta(x - x_{k,s}(t)),$$
 position de la k-ème discontinuité

Pour que le système d'équations de sensibilité soit valable même quand l'état est discontinu, nous rajoutons un terme source :

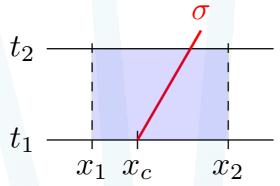
$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U}_a + \partial_x \mathbf{F}_a(\mathbf{U}, \mathbf{U}_a) = \mathbf{S} & \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{U}_a(x, 0) = \mathbf{g}_a(x) & \Omega, \end{cases}$$

de la forme suivante :

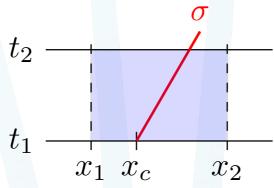
nombre de discontinuités

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^{N_s} \pmb{\rho}_k \delta(x - (x_{k,s}(t))), \qquad \text{position de la k-ème discontinuité}$$
 amplitude de la k-ème correction (à calculer)

Pour calculer l'amplitude d'une correction, nous considérons un volume de contrôle infinitésimal qui contient une discontinuité :



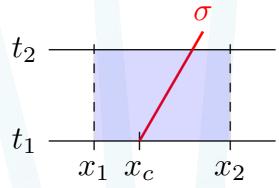
Pour calculer l'amplitude d'une correction, nous considérons un volume de contrôle infinitésimal qui contient une discontinuité :



En intégrant l'équation de sensibilité sur le volume de contrôle, nous obtenons :

$$\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{U}_a^- - \mathbf{U}_a^+)\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_a^+ - \mathbf{F}_a^-$$

Pour calculer l'amplitude d'une correction, nous considérons un volume de contrôle infinitésimal qui contient une discontinuité :

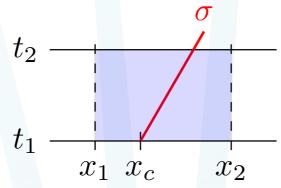


En intégrant l'équation de sensibilité sur le volume de contrôle, nous obtenons :

$$\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{U}_a^- - \mathbf{U}_a^+)\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_a^+ - \mathbf{F}_a^-$$

Conditions de Rankine-Hugoniot pour l'état :  $({\bf U}^+ - {\bf U}^-)\sigma = {\bf F}^+ - {\bf F}^-$ 

Pour calculer l'amplitude d'une correction, nous considérons un volume de contrôle infinitésimal qui contient une discontinuité :



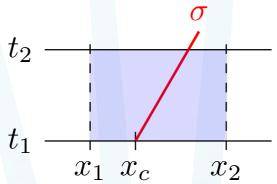
En intégrant l'équation de sensibilité sur le volume de contrôle, nous obtenons :

$$\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{U}_a^- - \mathbf{U}_a^+)\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_a^+ - \mathbf{F}_a^-$$

Conditions de Rankine-Hugoniot pour l'état :  $(\mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^-)\sigma = \mathbf{F}^+ - \mathbf{F}^-$ 

En les dérivant par rapport au paramètre :  $(\mathbf{U}_a^+ - \mathbf{U}_a^-)\sigma + (\mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^-)\sigma_a = \mathbf{F}_a^+ - \mathbf{F}_a^-$ 

Pour calculer l'amplitude d'une correction, nous considérons un volume de contrôle infinitésimal qui contient une discontinuité :



En intégrant l'équation de sensibilité sur le volume de contrôle, nous obtenons :

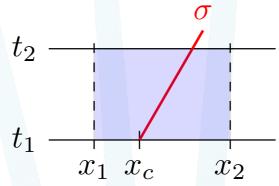
$$\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{U}_a^- - \mathbf{U}_a^+)\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_a^+ - \mathbf{F}_a^-$$

Conditions de Rankine-Hugoniot pour l'état :  $(\mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^-)\sigma = \mathbf{F}^+ - \mathbf{F}^-$ 

En les dérivant par rapport au paramètre :  $(\mathbf{U}_a^+ - \mathbf{U}_a^-)\sigma + (\mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^-)\sigma_a = \mathbf{F}_a^+ - \mathbf{F}_a^-$ 

D'où la définition suivante de l'amplitude :  $\rho = (\mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^-)\sigma_a$ 

Pour calculer l'amplitude d'une correction, nous considérons un volume de contrôle infinitésimal qui contient une discontinuité :



En intégrant l'équation de sensibilité sur le volume de contrôle, nous obtenons :

$$\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{U}_a^- - \mathbf{U}_a^+)\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_a^+ - \mathbf{F}_a^-$$

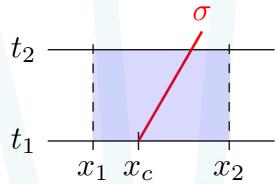
Conditions de Rankine-Hugoniot pour l'état :  $(\mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^-)\sigma = \mathbf{F}^+ - \mathbf{F}^-$ 

En les dérivant par rapport au paramètre :  $(\mathbf{U}_a^+ - \mathbf{U}_a^-)\sigma + (\mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^-)\sigma_a = \mathbf{F}_a^+ - \mathbf{F}_a^-$ 

D'où la définition suivante de l'amplitude :  $\rho = (\mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^-)\sigma_a$ 

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^{N_s} \boldsymbol{\rho}_k \delta(x - x_{k,s}(t)),$$

Pour calculer l'amplitude d'une correction, nous considérons un volume de contrôle infinitésimal qui contient une discontinuité :



En intégrant l'équation de sensibilité sur le volume de contrôle, nous obtenons :

$$\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{U}_a^- - \mathbf{U}_a^+)\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F}_a^+ - \mathbf{F}_a^-$$

Conditions de Rankine-Hugoniot pour l'état :  $(\mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^-)\sigma = \mathbf{F}^+ - \mathbf{F}^-$ 

En les dérivant par rapport au paramètre :  $(\mathbf{U}_a^+ - \mathbf{U}_a^-)\sigma + (\mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^-)\sigma_a = \mathbf{F}_a^+ - \mathbf{F}_a^-$ 

D'où la définition suivante de l'amplitude :  $\rho = (\mathbf{U}^+ - \mathbf{U}^-)\sigma_a$ 

$$\mathbf{S} = \sum_{k=1}^{N_s} \boldsymbol{\rho}_k \delta(x - x_{k,s}(t)),$$

Il faut introduire un détecteur de choc.

#### **Cas test**

Équations d'Euler barotrope :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = 0. \end{cases} \qquad p'(\tau) < 0 \qquad p''(\tau) > 0$$

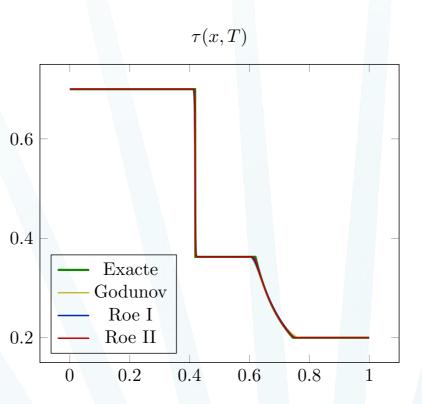
Équations de sensibilité :

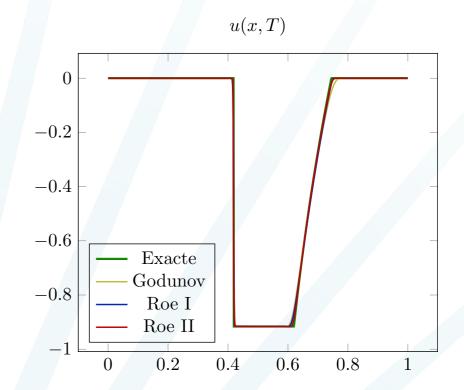
$$\begin{cases} \partial_t \tau_a - \partial_x u_a = S_\tau, \\ \partial_t u_a + \partial_x (p'(\tau)\tau_a) = S_u. \end{cases}$$

Données initiales:

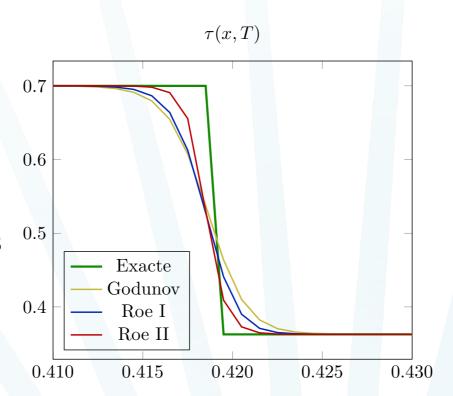
$$\mathbf{U}_L = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_R = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U}_{a,L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U}_{a,R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

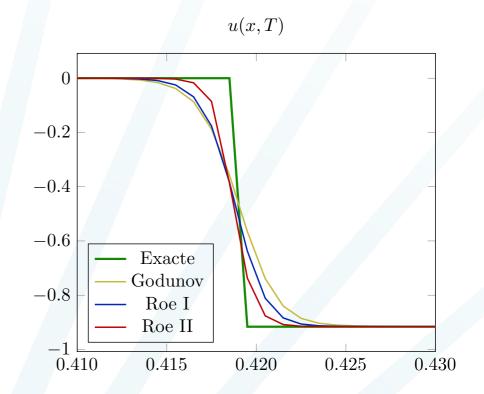
La resolution de l'état étant un problème classique, tous les schémas donnent des bons résultats.



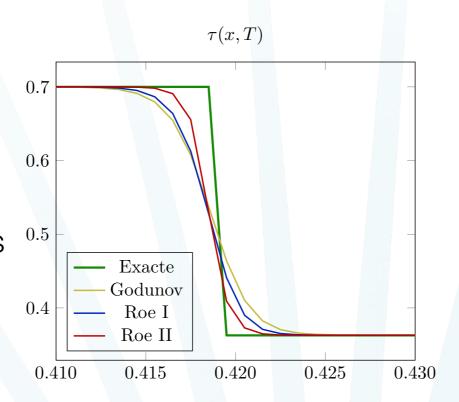


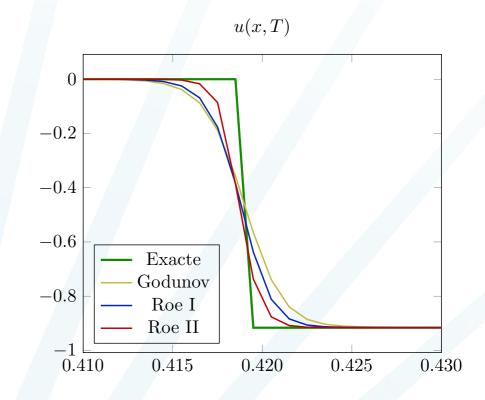
La resolution de l'état étant un problème classique, tous les schémas donnent des bons résultats.



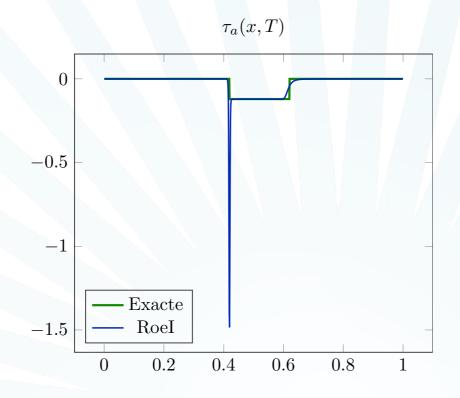


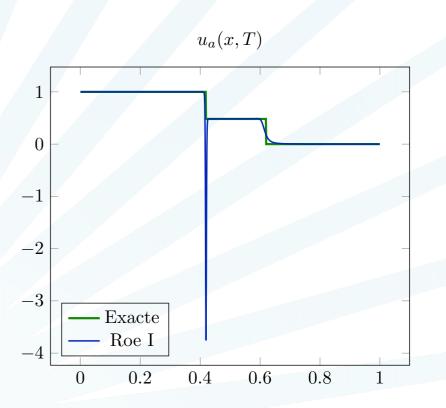
La resolution de l'état étant un problème classique, tous les schémas donnent des bons résultats.



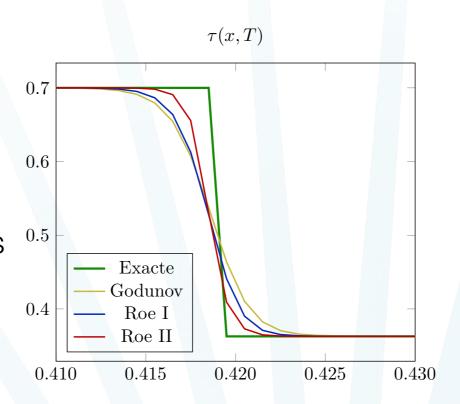


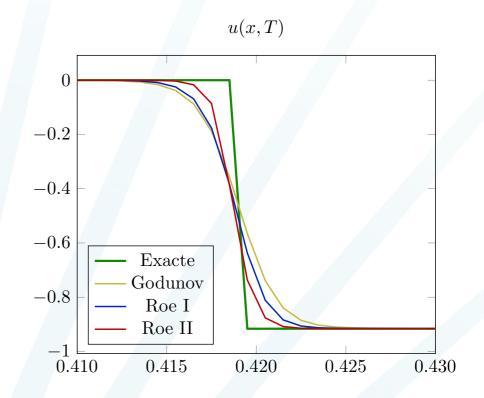
Les mêmes schémas sans terme source ne fonctionnent pas pour la sensibilité.



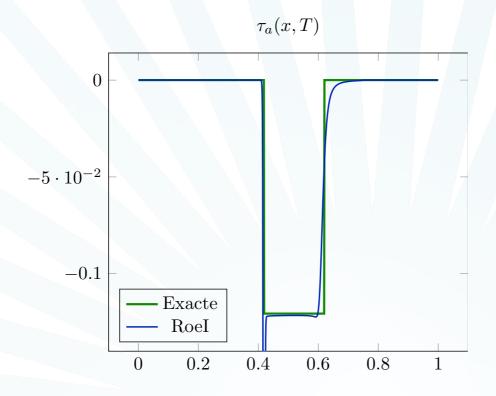


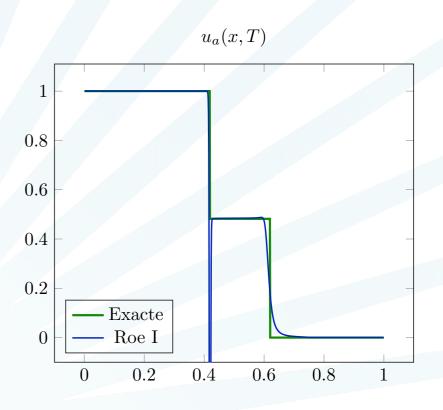
La resolution de l'état étant un problème classique, tous les schémas donnent des bons résultats.



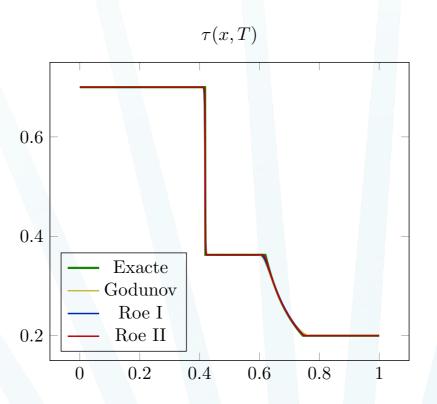


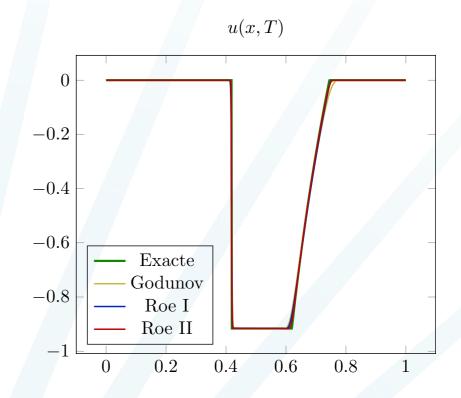
Les mêmes schémas sans terme source ne fonctionnent pas pour la sensibilité.



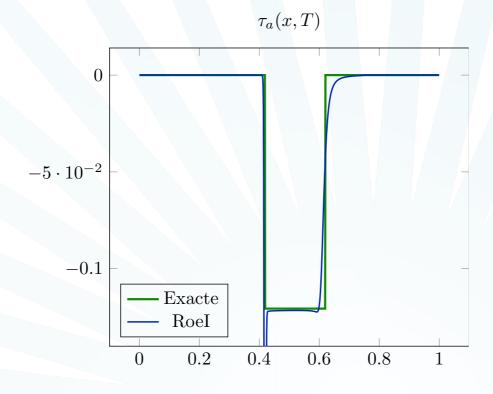


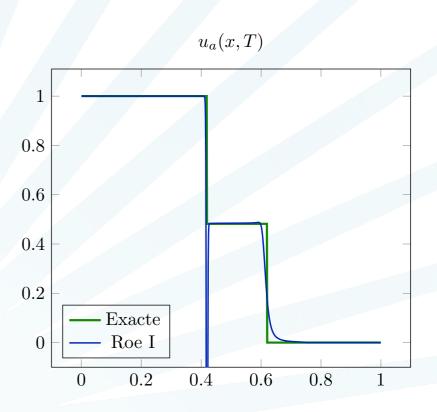
La resolution de l'état étant un problème classique, tous les schémas donnent des bons résultats.



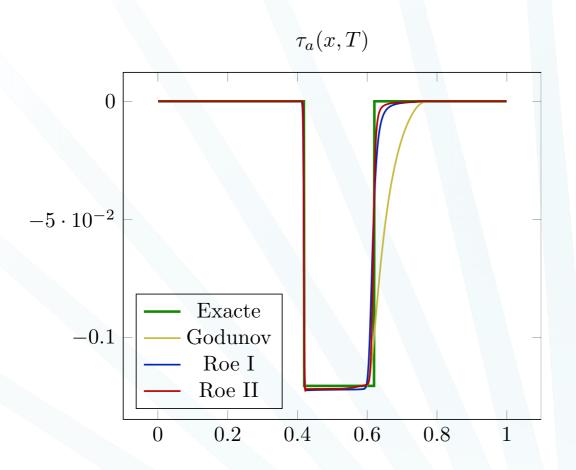


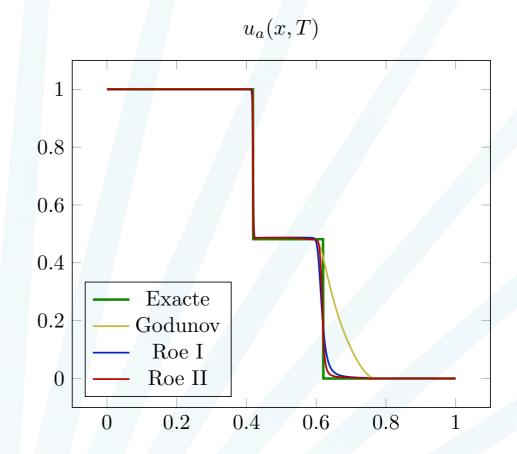
Les mêmes schémas sans terme source ne fonctionnent pas pour la sensibilité.





Les mêmes schémas pour la sensibilité, avec terme source :

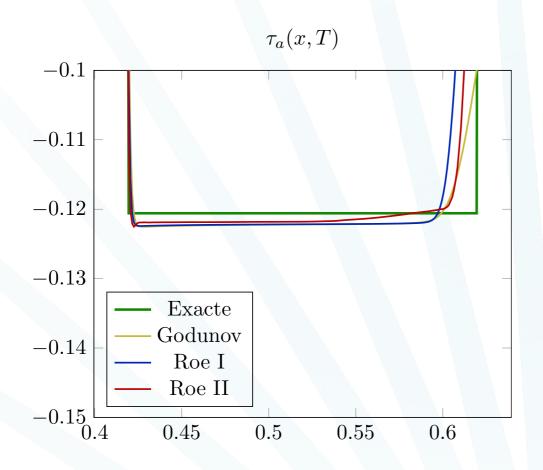


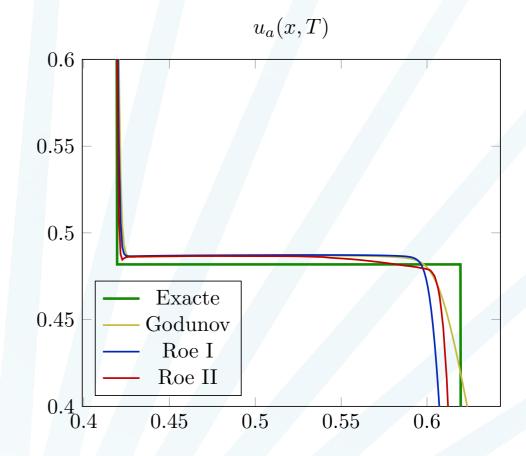


Problèmes: Ia détente est une discontinuité pour la sensibilité,

la valeur de la sensibilité dans la zone étoile n'est pas la bonne.

Les mêmes schémas pour la sensibilité, avec terme source :

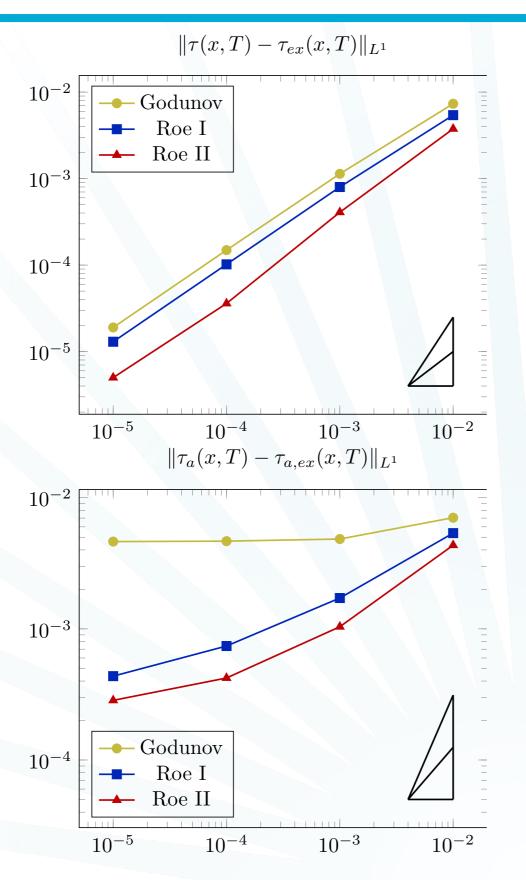


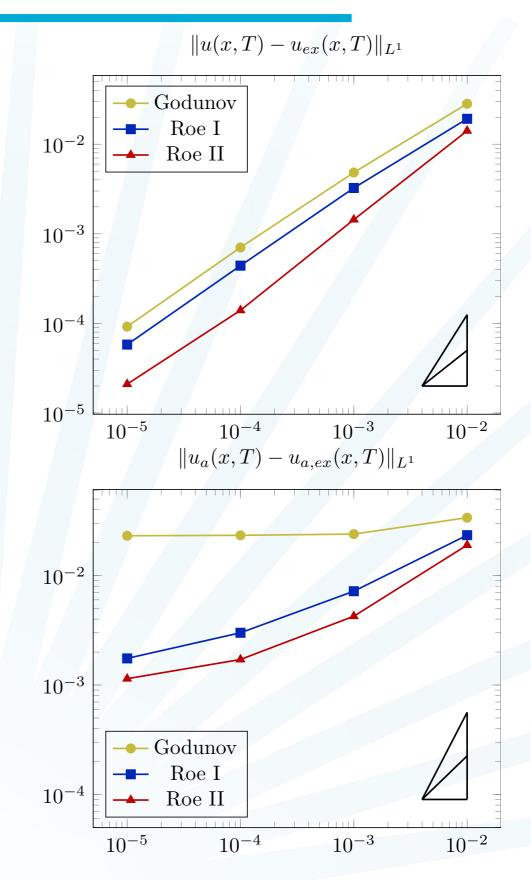


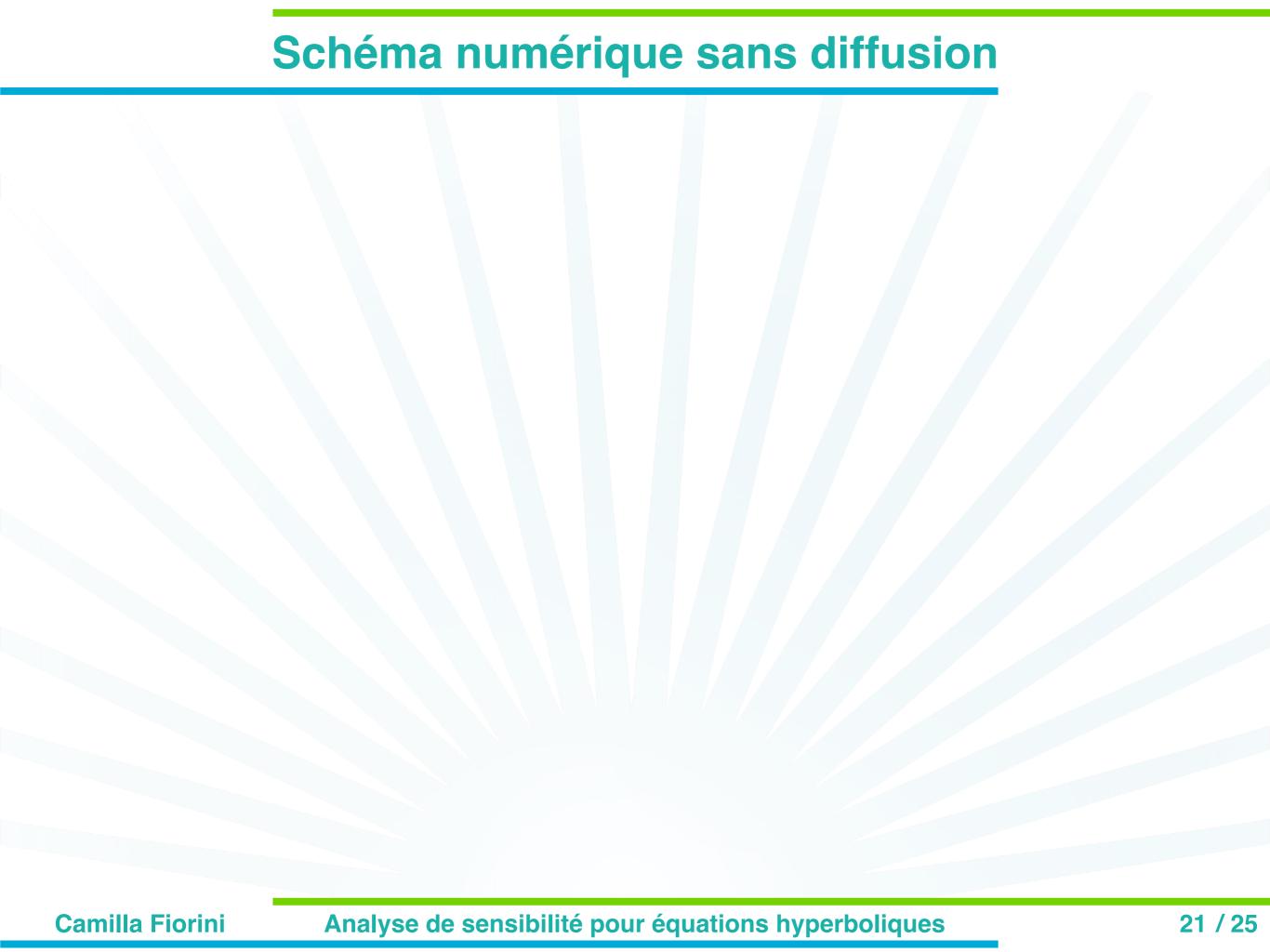
Problèmes: Ia détente est une discontinuité pour la sensibilité,

la valeur de la sensibilité dans la zone étoile n'est pas la bonne.

## Convergence

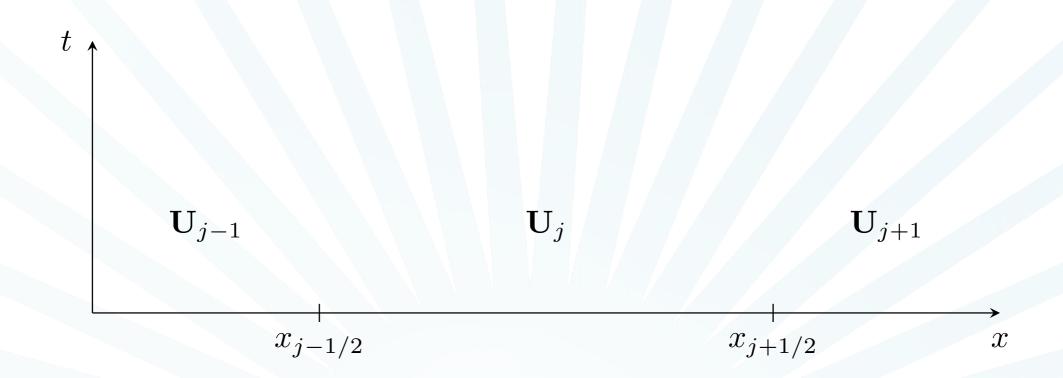






# Schéma numérique sans diffusion

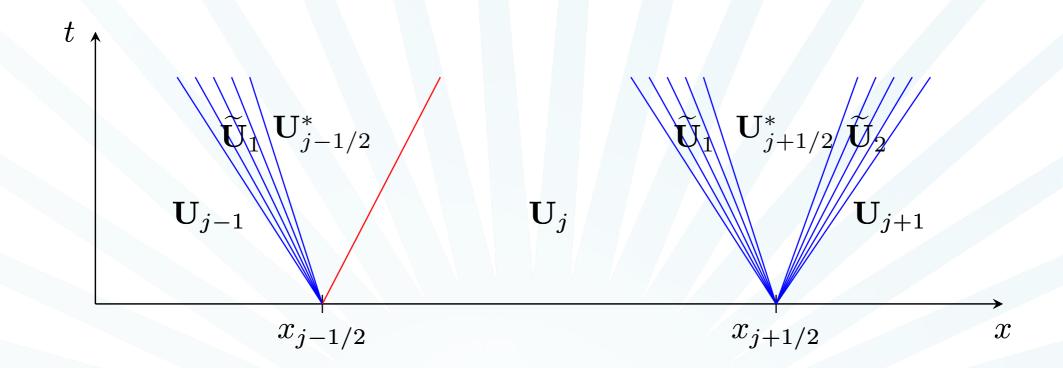
Étape 0 : discrétisation de la donnée initiale



## Schéma numérique sans diffusion

Étape 0 : discrétisation de la donnée initiale

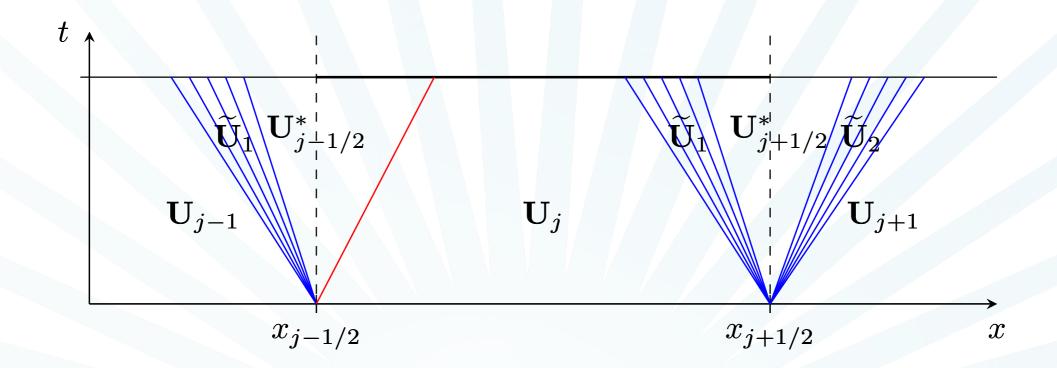
Étape 1 : résolution des problèmes de Riemann, un par interface



Étape 0 : discrétisation de la donnée initiale

Étape 1 : résolution des problèmes de Riemann, un par interface

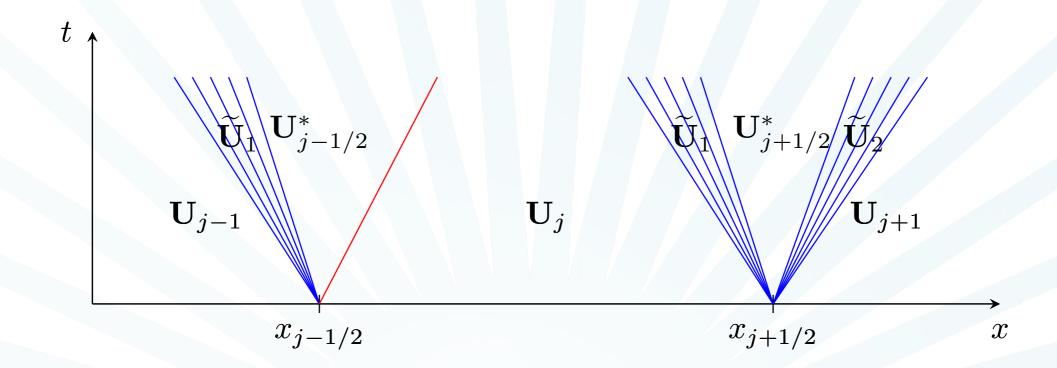
Étape 2 : moyenne



Étape 0 : discrétisation de la donnée initiale

Étape 1 : résolution des problèmes de Riemann, un par interface

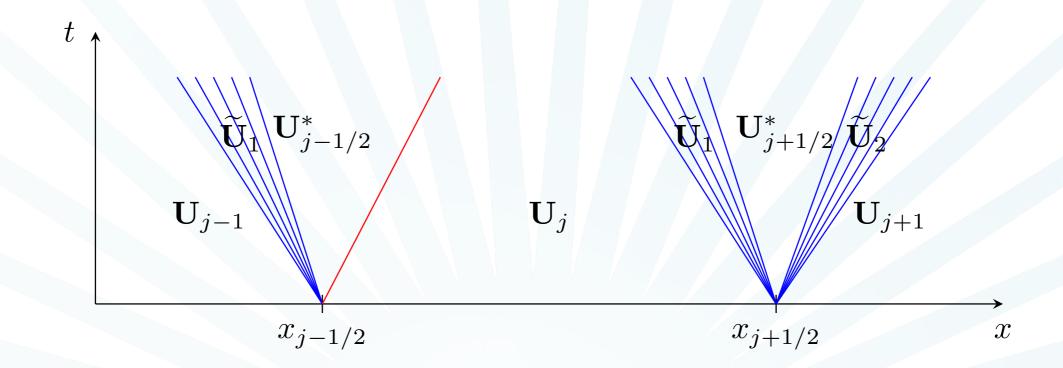
Étape 2 : moverne



Étape 0 : discrétisation de la donnée initiale

Étape 1 : résolution des problèmes de Riemann, un par interface

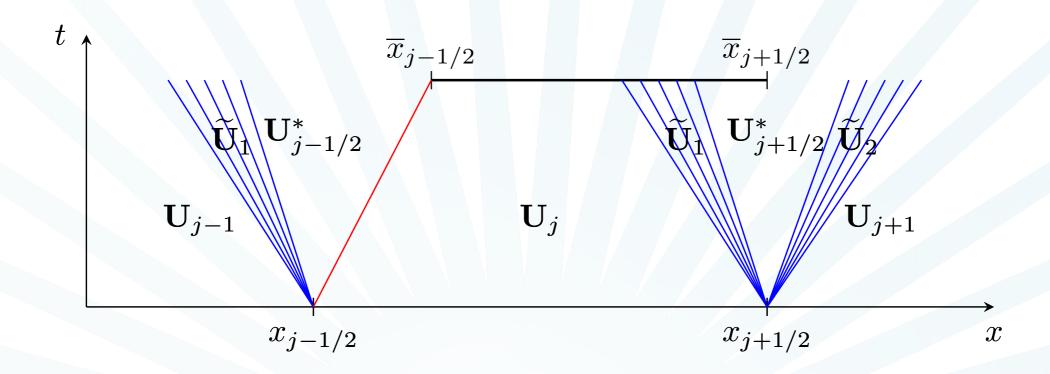
Étape 2 : définition des cellules décalées



Étape 0 : discrétisation de la donnée initiale

Étape 1 : résolution des problèmes de Riemann, un par interface

Étape 2 : définition des cellules décalées



$$\overline{x}_{j-1/2} = x_{j-1/2} + \sigma_{j-1/2} \Delta t$$

Étape 0 : discrétisation de la donnée initiale

Étape 1 : résolution des problèmes de Riemann, un par interface

Étape 2 : définition des cellules décalées

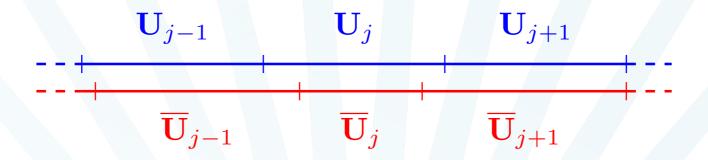
Étape 3 : retour au maillage de départ

Étape 0 : discrétisation de la donnée initiale

Étape 1 : résolution des problèmes de Riemann, un par interface

Étape 2 : définition des cellules décalées

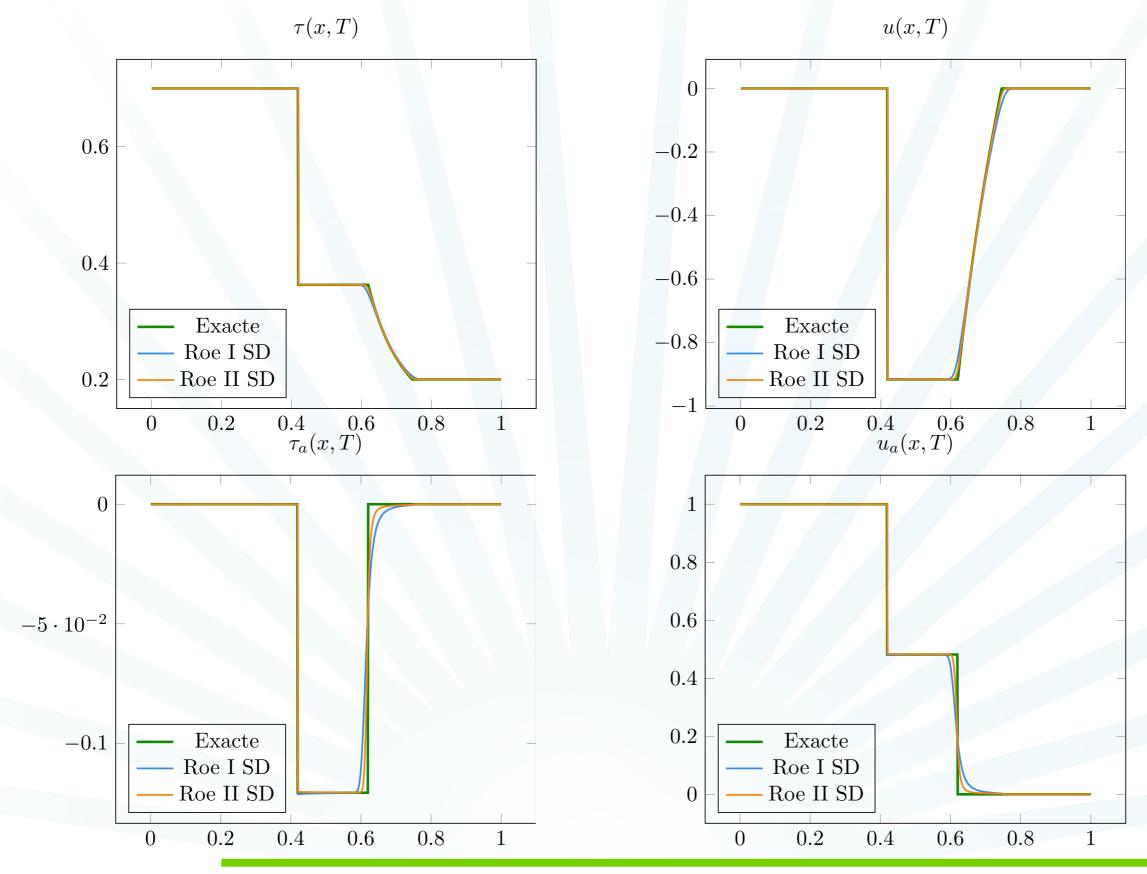
Étape 3 : retour au maillage de départ



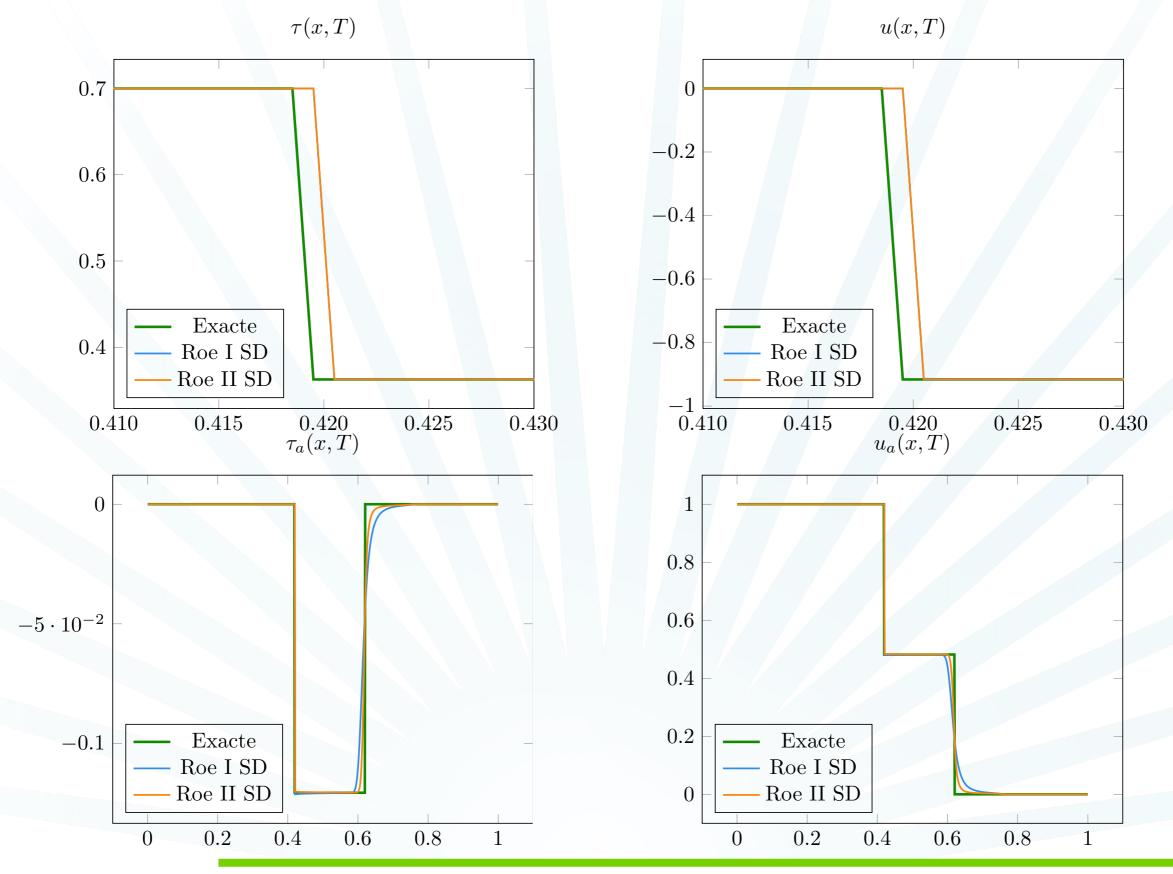
$$\mathbf{U}_{j} = \begin{cases} \overline{\mathbf{U}}_{j-1} & \text{if } a \in \left(0, \frac{\Delta t}{\Delta x} \max(\sigma_{j-1/2}, 0)\right), \\ \overline{\mathbf{U}}_{j} & \text{if } a \in \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} \max(\sigma_{j-1/2}, 0), 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} \min(\sigma_{j+1/2}, 0)\right), \\ \overline{\mathbf{U}}_{j+1} & \text{if } a \in \left[1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} \min(\sigma_{j+1/2}, 0), 1\right). \end{cases}$$

$$a \sim \mathcal{U}([0,1])$$

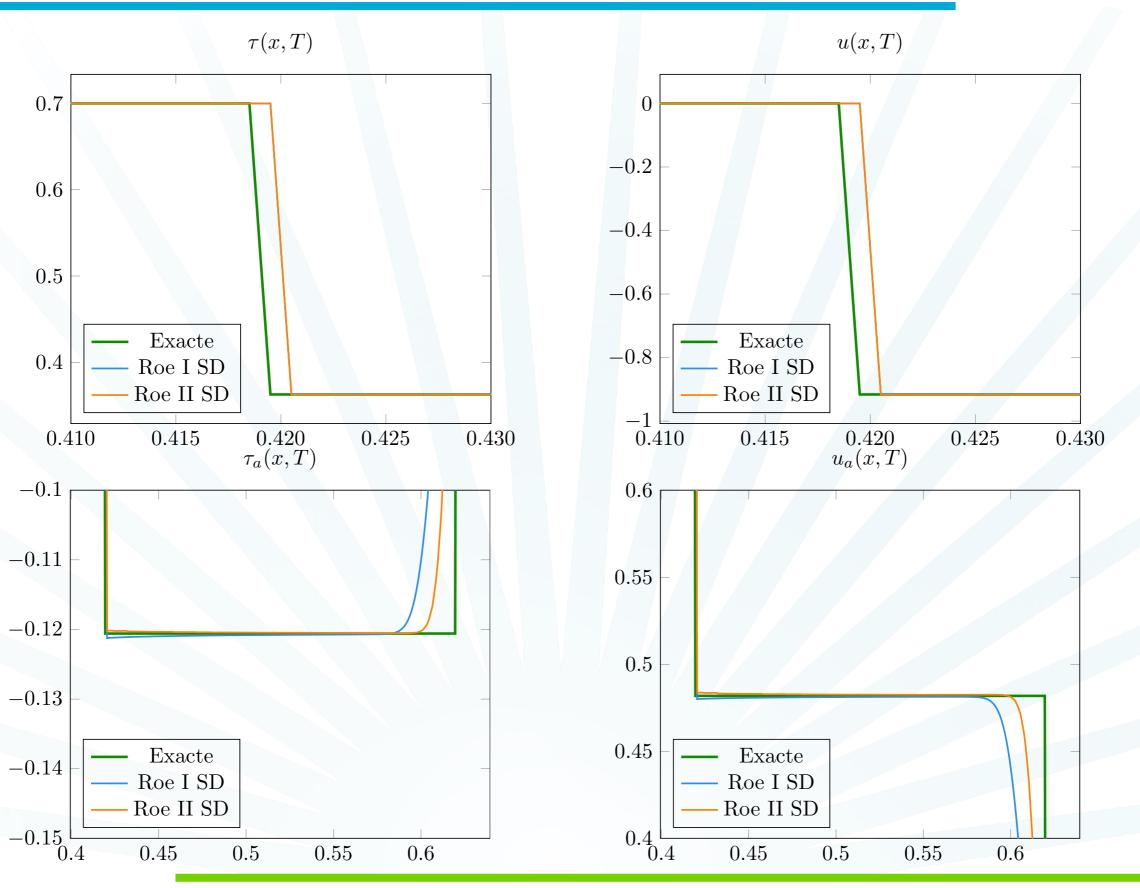
#### Résultats:)



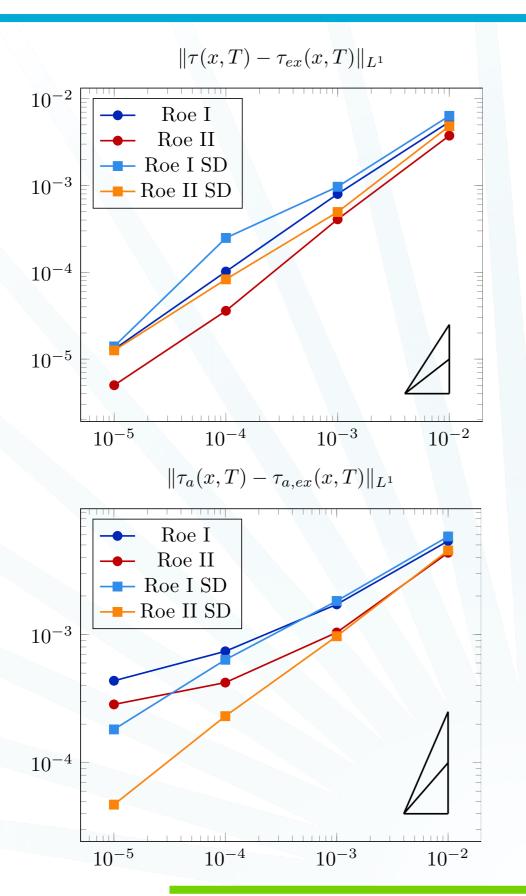
#### Résultats:)

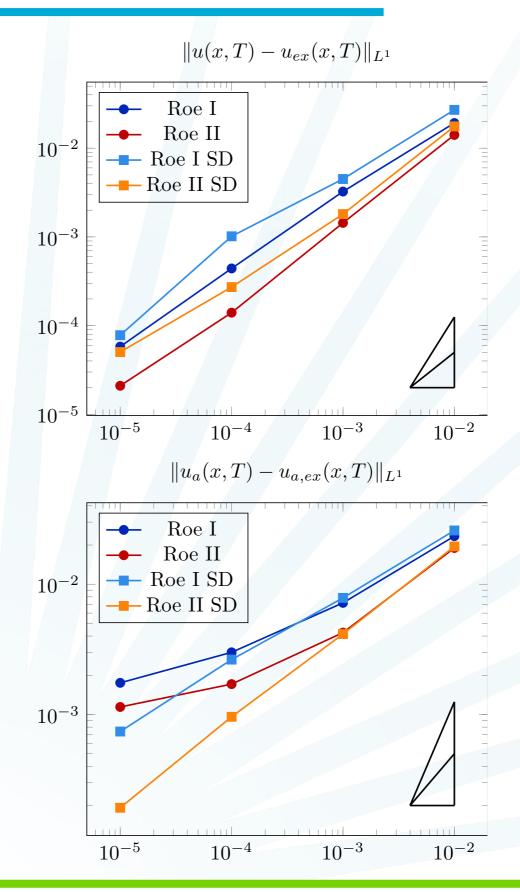


#### **Résultats:)**



#### **Convergence:**)





## **Perspectives**

- Étendre au système d'Euler complet
- ▶ Passer en 2D
- Applications

# Merci de votre attention!